## • Οι εξισώσεις Euler με περιορισμό

Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων πάνω σε μια επιφάνεια. Τότε προφανώς όλα τα σημεία της διαδρομής πρέπει να ικανοποιούν και την εξίσωση της επιφάνειας. Δηλαδή ζητάμε την ελαχιστοποίηση μιας ποσότητας (απόσταση) στην οποία επιβάλλεται μια παρακάτω συνθήκη.

Έστω $f=f(y,y',z,z',x)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και των παραγώγων της και $g(y,z,x)=0$ η συνθήκη/επιφάνεια που βρίσκονται.

Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$\frac{\partial J}{\partial a}=\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{\partial z}{\partial a}\right]dx$$

Πλέον οι παράγωγοι $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ δεν είναι ανεξάρτητες και άρα οι συνθήκες Euler δεν ισχύουν όπως πριν χωρίς τη συνθήκη $g(y,z,x)=0$

Οι εξισώσεις Euler για $a=0$ δεν ικανοποιούνται και ζητώ μια σχέση μεταξύ των παραγώγων $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ ώστε για $a=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial J}{\partial a}=0}$

Συμπεραίνεται ότι:

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial x}\cancel{\frac{\partial x}{\partial a}}^{\to 0}$$

Προϋπόθεση: $\boxed{\dfrac{\partial x}{\partial a} = 0}$ και μιας και $g=0$

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} = 0$$

Όμως:

$$\begin{cases} y(a,x) = y(0,x) + a u_1(x) \\ z(a,x) = z(0,x) + a u_2(x) \end{cases} \implies$$

$$\implies \frac{\partial y}{\partial a} = u_1 , \quad \frac{\partial z}{\partial a} = u_2$$

Άρα

$$\frac{\partial g}{\partial y} u_1 = -u_2 \frac{\partial g}{\partial z} \implies u_2 = -u_1 \frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z}$$

Συνολικά:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \underbrace{u_1}_{=\frac{\partial y}{\partial a}} + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \underbrace{\left( -u_1 \frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z} \right)}_{\substack{= u_2 \\ = \frac{\partial z}{\partial a}}} \right] dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial J}{\partial a}\right|_{a=0} = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z} \right] u_1\, dx = 0$$

$$,\ \forall u_1$$

Άρα: $$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\frac{1}{\partial g/\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{1}{\partial g/\partial z}$$

Η εξίσωση που προκύπτει έχει διαχωρίσει πλήρως τις μεταβλητές $y$ και $z$

Οι ποσότητες είναι ίσες ως και οι δύο:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\frac{1}{\partial g/\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{1}{\partial g/\partial z} = \lambda(x)$$

Δηλαδή προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\lambda(x) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial z'}\ \dfrac{\partial g}{\partial z}\lambda(x) = 0 \end{cases}$$

## Παρατηρήσεις

① Στο σύστημα των εξισώσεων που πήραμε, οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι τρεις. Οι $y=y(x)$, $z=z(x)$, $\lambda=\lambda(x)$. Αν και φαινομενικά οι εξισώσεις είναι δύο, συμπληρώνουμε το σύστημα με την εξίσωση συνθήκης $g(y,z,x)=0$.
Η συνάρτηση $\lambda=\lambda(x)$ καλείται και πολλαπλασιαστής Lagrange. (Lagrange multiplier)

② Η όλη διαδικασία λέγεται βελτιστοποίηση υπό συνθήκη (optimization under constraint)

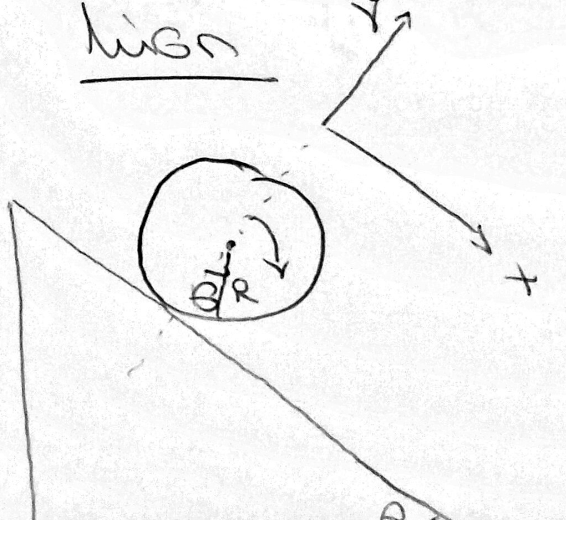
③ Στη γενική περίπτωση που έχουμε περισσότερες από δύο μεταβλητές, δηλαδή $f=f(y_i,x)$, γράφουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}+\sum_j \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i}=0\ , \quad g_j(y_i,x)=0$$

## Παράδειγμα

Έστω κυκλικός δίσκος που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο. Ν.β. η συνάρτηση περιορισμού.

### Λύση




Το διάστημα που διανύει είναι $\boxed{x=R\theta}$

Άρα $g(x,\theta)=x-R\theta=0$

(1) Η ισοβαθμή περιοριστική μπορεί να διατυπωθεί και σε εναλλακτική μορφή.

Έστω ότι ψάχνε τη συνάρτηση $y=y(x)$ για την οποία το συναρτησοειδές (functional)

$$J[y]=\int_a^b f(y,y',x)\,dx$$ είναι ακρότατο με

$y(a)=A$, $y(b)=B$. και επιπλέον το

$$K[y]=\int_a^b g(y,y',x)\,dx$$ να είναι σταθερό.

Τότε ψάχνε τη σταθερά $\lambda$ για την οποία το

$$\int_a^b (f+\lambda g)\,dx$$ έχει ακρότατο.

Δηλαδή:

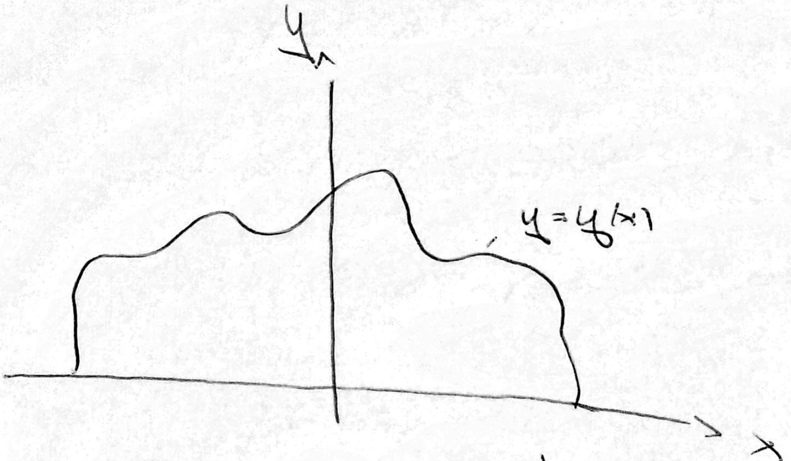
$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}+\lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}\right)=0$$

$y(a)=A$, $y(b)=B$ και $K[y]=l$ σταθερά.

**Παράδειγμα**

Να βρεθεί η καμπύλη $y=y(x)$, σταθερού μήκους $l$ που φράσσεται από τον οριζόντιο άξονα $x'x$ και εσωκλείει την μέγιστη περιοχή του.

**Λύση**




Το εμβαδό: $I[y] = \int_a^b y(x)\,dx$

Προϋποθέσεις: $y(a)=y(b)=0$ και $K[y] = \int_a^b \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = l$

$$= \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = l$$

$f = y$, $g = \sqrt{1+(y')^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$

Αντικαθιστώ:

$$1 - 0 + \lambda\left(0 - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0 \Rightarrow \lambda \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \lambda x + c_1$$

Υψώνω στο τετράγωνο και λύνω ως προς $(y')^2$. Τότε:

$$(y')^2 = \frac{(x-c_1)^2}{\lambda^2-(x-c_1)^2} \Rightarrow dy = \pm\sqrt{\frac{(x-c_1)^2}{\lambda^2-(x-c_1)}}\,dx \quad (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2 = \lambda^2} \quad (2)$$

Εφαρμόζω τις συνθήκες $y(a)=y(b)=0$ και βρίσκω το $\lambda$

<u>Άσκηση:</u>

1) Να συμπληρώσετε τα βήματα από την (1) στην (2)

2) Να βρεθεί η καμπύλη όταν $a=-b$

3) Να βρεθεί η γενική περίπτωση της καμπύλης